

---

# AUGMENTATION DU NIVEAU POUR $U(n, 1)$

*par*

Boyer Pascal & Deng Taiwang

---

**Résumé.** — Le principe de Mazur fournit des conditions simples pour qu’une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible non ramifiée provenant d’une forme modulaire de niveau  $\Gamma_0(Np)$  provienne aussi d’une forme de niveau  $\Gamma_0(N)$ . L’objectif de ce travail est de proposer une généralisation de ce principe en dimension supérieure pour le groupe  $U(n, 1)$  via la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor.

**Abstract (Raising level for Kottwitz-Harris-Taylor Shimura varieties)**

The Mazur principle give simple conditions for an irreducible unramified  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -representation coming from a modular form of level  $\Gamma_0(Np)$  to come for some modular form of level  $\Gamma_0(N)$ . The aim of this work is to give a generalization of this principle en higher dimension for the group  $U(n, 1)$  studying the cohomology of Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type.

## Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Rappels.....	5
2.1. Géométrie des variétés de Kottwitz-Harris-Taylor.....	5
2.2. Cohomologie d’un système local.....	7
2.3. Localisation de la cohomologie et torsion.....	8
3. Augmentation du niveau.....	10
3.1. Suite spectrale de Rapoport-Zink.....	10
3.2. Preuve du théorème principal.....	11
Références.....	13

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l’algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

Les auteurs remercient l’ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

## 1. Introduction

Dans la théorie classique des formes modulaires, la détermination optimale du niveau à partir duquel une représentation galoisienne modulo  $l$  est modulaire, est cruciale, que l'on pense par exemple à son application à la preuve du grand théorème de Fermat. Les conjectures de Serre, désormais prouvées par Khare et Wintenberger dans [6], fournissent un cadre précis pour cette question dans le cas de  $GL_2$ . Avant [6], le principe de Mazur rappelé ci-après était l'ingrédient principal, cf. par exemple le théorème de Ribet.

### 1.1. Théorème. — (Principe de Mazur cf. [8] théorème 6.1)

Soient  $N$  un entier,  $p$  un nombre premier ne divisant pas  $N$  et  $\bar{\rho} : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\bar{\mathbb{F}}_l)$  une représentation galoisienne provenant d'une forme modulaire de niveau  $\Gamma_0(Np)$ . On suppose que

- $p \neq l$ ,
- $\bar{\rho}$  est irréductible et non ramifiée en  $p$  et
- $l$  ne divise pas  $p - 1$ .

Alors  $\bar{\rho}$  provient d'une forme modulaire de niveau  $\Gamma_0(N)$ .

Dans ce travail, nous proposons une généralisation du principe de Mazur pour le groupe  $U(1, d - 1)$  en utilisant d'après [2] et [3], la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor. Afin d'énoncer notre théorème principal, rappelons les objets concernés.

- Comme dans [4], on choisit un groupe de similitudes  $G/\mathbb{Q}$  associé à une algèbre à division  $B$  sur une extension CM  $F/\mathbb{Q}$ , tel que les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d - 1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$  et si  $w$  est une place de  $F$  telle que  $w|_{\mathbb{Q}}$  est totalement décomposée dans  $F$  alors  $B_w^\times \simeq GL_d(F_w)$ .
- On note  $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  le système projectif des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor indexée par un certain ensemble  $\mathcal{I}$  de sous-groupe compacts ouverts de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  où  $\mathbb{A}^\infty$  désigne les adèles finies de  $\mathbb{Q}$ .
- Pour un tel  $I$ , on note  $\text{Spl}(I)$  l'ensemble des places  $w$  de  $F$  telles que  $p_w := w|_{\mathbb{Q}}$  est décomposée dans  $F$  et la composante locale  $I_w$  de  $I$  à la place  $w$  est isomorphe à  $GL_d(\mathcal{O}_w)$ . On associe à  $I$  l'algèbre de Hecke

$$\mathbb{T}_I = \mathbb{Z}_l \left[ T_w^{(i)} : w \in \text{Spl}(I), i = 1, \dots, d \right],$$

où  $T_w^{(i)} = \text{diag}(\overbrace{p_w, \dots, p_w}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \times 1 \in GL_d(\mathbb{Q}_{p_w}) \times \mathbb{Z}_{p_w}$ .

- On fixe alors une place  $v$  de  $F$  telle que  $p := v|_{\mathbb{Q}}$  est décomposé dans  $F$  et  $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$ . Les sous-groupes compacts ouverts  $I \in \mathcal{I}$  considérés sont supposés être de la forme suivante : il existe une partition

$$d = m_1 + \cdots + m_r \quad \text{avec} \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 1,$$

telle que modulo l'uniformisante  $\varpi_v$  de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_v$  de  $F_v$ , la composante  $I_v$  est un parabolique standard de Lévi isomorphe à  $GL_{m_1} \times GL_{m_2} \times \cdots \times GL_{m_r}$ .

- Étant donnée une représentation algébrique irréductible  $\xi$  de  $G(\mathbb{Q})$ , on note  $V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  un réseau stable du système local associé à  $\xi$  sur  $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ .

Soit alors  $\tilde{\mathfrak{m}}$  un idéal premier minimal de  $\mathbb{T}_I$  qui soit  $\xi$ -cohomologique, i.e. tel qu'il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe  $\xi$ -cohomologique  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  possédant des vecteurs non nuls fixes sous  $I$  et tel que pour tout  $w \in \text{Spl}(I)$ , les paramètres de Satake de  $\Pi_{p_w}$  sont donnés par les images des  $T_w^{(i)} \in K_{\tilde{\mathfrak{m}}} := (\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l) / \tilde{\mathfrak{m}}$ , où  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est une extension finie de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ . Un tel  $\Pi$  n'est pas nécessairement unique mais définit une unique classe d'équivalence proche au sens de [9] que l'on notera  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ . On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} : \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

la représentation galoisienne associée à un tel  $\Pi$  d'après [4] et [9], laquelle est, d'après le théorème de Cebotarev, définie à isomorphisme sur  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , i.e.  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} \simeq \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} \otimes_{K_{\tilde{\mathfrak{m}}}} \overline{\mathbb{Q}}_l$ . Pour une place  $v$  de  $F$ , la restriction de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  au groupe de Galois local en  $v$  s'identifie à une représentation de Weil-Deligne  $(\sigma_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}, N_{\tilde{\mathfrak{m}}, v})$  où  $N_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}$  est le logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale. Notons que cet opérateur nilpotent est défini à l'aide de la série formelle  $\ln(1-x) = -\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  que l'on peut tronquer en  $k \leq d-1$ . En particulier

- si  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est entière, i.e. s'il existe un réseau stable  $\Gamma$  et si  $l \geq d$ , alors l'opérateur  $N_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}$  est défini sur  $\Gamma$  et on note  $\overline{N}_{\tilde{\mathfrak{m}}, v, \Gamma}$  sa réduction modulo l'idéal maximal  $(\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}})$  de l'anneau des entiers de  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ .
- Si en outre la réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est irréductible alors tous les réseaux stables  $\Gamma$  son homothétiques et on notera simplement  $\overline{N}_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}$ .

Étant donné un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$ , pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , la réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , bien définie à semi-simplification près, ne dépend que de  $\mathfrak{m}$ , on note  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{F}}_l)$  son extension des scalaires à  $\overline{\mathbb{F}}_l$  : ses paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w \in \text{Spl}(I)$  sont donnés par le multi-ensemble

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_w^{(i)}}}{\overline{T_w^{(i-1)}}} \in \mathbb{T}_I / \mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Pour  $l > d$ , on note aussi  $\overline{N}_{\mathfrak{m}, v}$  l'opérateur de monodromie associé.

*Remarque* : un multi-ensemble est un couple  $(E, m)$  avec  $E$  un ensemble et  $m : E \longrightarrow \mathbb{N}$  la fonction multiplicité. Par définition le cardinal du multi-ensemble  $(E, m)$  est  $\sum_{e \in E} m(e)$ .

À l'instar du principe de Mazur, l'augmentation du niveau que nous proposons, nécessite un certain nombre d'hypothèses.

**1.2. Hypothèse.** — Soit  $I \in \mathcal{I}$  un sous-groupe compact ouvert tel que modulo  $\varpi_v$ , la composante  $I_v$  de  $I$  à la place  $v$  est conjuguée au parabolique standard de Lévi  $GL_{m_1} \times GL_{m_2} \times \dots \times GL_{m_r}$  de  $GL_d$  avec  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$  et  $r > 1$ . Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$ , tel qu'il existe un idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  ainsi qu'une représentation automorphe irréductible  $\Pi \in \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  possédant des vecteurs non nuls invariants sous  $I$ . On suppose en outre que :

- 1)  $\mathfrak{m}$  vérifie l'une des conditions suivantes :

- a)  $\Pi$  est  $\xi$ -cohomologique pour  $\xi$  un paramètre suffisamment régulier au sens de [7].
  - b) il existe  $w \in \text{Spl}(I)$  tel que pour tout  $\alpha \in S_{\mathfrak{m}}(w)$ ,  $q_w \alpha \notin S_{\mathfrak{m}}(w)$ .
  - c)  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est induit d'un caractère de  $G_K$  pour  $K/F$  une extension galoisienne cyclique et  $l > d + 2$ .
  - d)  $l \geq d + 2$  et  $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \mathbb{F}_l^\times GL_n(k)$  pour un sous-corps  $k \subset \mathbb{F}_l$ .
- 2)  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est irréductible,
- 3) l'indice de nilpotence de  $\bar{N}_{\mathfrak{m},v}$  est  $\leq r - 1$ , i.e.  $\bar{N}_{\mathfrak{m},v}^{r-1} = 0$ ,
- 4) le multi-ensemble  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  des valeurs propres de  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(\text{Frob}_v)$  vérifie les deux conditions suivantes :
- i) les multiplicités dans  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  sont égales à 1, i.e.  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  est un ensemble de cardinal  $d$ ,
  - ii)  $V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v)$  est de cardinal  $\leq m_r$ .

Faisons quelques remarques sur ces hypothèses et notamment leurs liens avec celles du principe de Mazur :

- la condition 4-i) impose en particulier que  $l \geq d$ .
- Les hypothèses de 1) servent à s'assurer que la cohomologie de la variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor associée à  $G$  est sans torsion concentrée en degré médian : dans la littérature on trouve parfois la notion « non pseudo-Eisenstein ». On peut bien entendu remplacer 1) par cette notion.
- Comme  $l \geq d$  et  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est irréductible,  $\bar{N}_{\mathfrak{m},v}$  est bien défini indépendamment du réseau stable ; la condition 3) est alors la généralisation de l'hypothèse non ramifiée dans le principe de Mazur. Nous verrons, cf. la première remarque du §3.2, qu'une telle condition est trivialement nécessaire.
- Les conditions de 4) sont techniques et au coeur de la preuve.

**1.3. Théorème.** — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un parahorique  $I'_v$  contenant strictement  $I_v$  ainsi qu'un idéal maximal  $\xi$ -cohomologique<sup>(1)</sup>  $\mathfrak{m}'$  de  $\mathbb{T}_{I'}$ , où  $I' := I'_v I^v$ , tel que*

$$\bar{\rho}_{\mathfrak{m}'} \simeq \bar{\rho}_{\mathfrak{m}},$$

*autrement dit  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  provient d'une représentation automorphe de niveau  $I'$ .*

*Remarque :* en revanche il est délicat d'itérer ce résultat quand bien même on aurait  $\bar{N}_{\mathfrak{m},v} = 0$  car la condition 4-ii) n'est rapidement plus vérifiée. Par exemple pour  $d = 3$  si  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est de niveau  $I = I^v I_v$  avec  $I_v$  le parahorique standard associé à la partition  $3 = 1 + 1 + 1$  alors nécessairement  $\sharp V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q V_{\mathfrak{m}}(v) \geq 2$  ce qui ne permet plus d'appliquer le théorème pour le parahorique associé à la partition  $3 = 2 + 1$ .

Ce travail est largement inspiré d'un preprint non publié [5] de David Helm sur le même sujet. Nous remercions aussi V. Sécherre pour nous avoir expliqué le lemme 3.2.1.

---

1. i.e. il existe un idéal premier minimal  $\widetilde{\mathfrak{m}'} \subset \mathfrak{m}'$  qui soit  $\xi$ -cohomologique

## 2. Rappels

**2.1. Géométrie des variétés de Kottwitz-Harris-Taylor.** — Dans la suite  $l$  et  $p$  désigneront deux nombres premiers distincts. Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$  et tel que  $l$  est non ramifié dans  $E$ . Pour  $v$  une place de  $F$ , on notera

- $F_v$  le complété du localisé de  $F$  en  $v$ ,
- $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ ,
- $\varpi_v$  une uniformisante et
- $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$ .

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ , on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [4], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de  $F^+$  au dessus de  $x$  avec les places de  $F$  au dessus de  $y$ ,  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [4], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé ;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d-1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier  $p = uu^c$  décomposé dans  $E$  tel qu'il existe une place  $v$  de  $F$  au dessus de  $u$  telle qu'avec un abus de notation coupable

$$G(F_v) := (B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v).$$

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^v(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times).$$

**2.1.1. Notation.** — Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »<sup>(2)</sup> de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , de la forme  $U^v(m)K_v$ . Pour un tel  $I \in \mathcal{I}$ , on note

$$X_I \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$$

la variété de Shimura de [4] dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à  $G$ .

---

2. tel qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^v$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [4] bas de la page 90

*Remarque :*  $X_I$  est un schéma projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  tel que  $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  forme un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand  $m_1 = m'_1$  alors  $X_{U^p(m)} \rightarrow X_{U^p(m')}$  est étale. Ce système projectif est par ailleurs muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$  telle que l'action d'un élément  $w_v$  du groupe de Weil  $W_v$  de  $F_v$  est donnée par celle de  $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$ , où  $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$  où  $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

**2.1.2. Notations.** — (cf. [1] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note :

- $X_{I, \bar{s}_v}$  la fibre spéciale de  $X_I$  en  $v$  et  $X_{I, \bar{s}_v} := X_{I, s_v} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$  la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I, \bar{s}_v}^{=h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).

Pour tout  $1 \leq h < d$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I, \bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}.$$

**2.1.3. Notation.** — On notera  $\mathcal{I}w(v)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{I}$  dont les éléments sont de la forme  $U^v(m)K_v$  où  $K_v$  est un sous-groupe parahorique de  $GL_d(\mathcal{O}_v)$  i.e. tel que la réduction modulo  $\varpi_v$  de  $K_v$  est un sous-groupe parabolique standard. Pour un tel  $I \in \mathcal{I}w(v)$ , on notera  $I^v := U^v(m) \in \mathcal{I}$ .

Pour  $I \in \mathcal{I}w(v)$  dont la réduction modulo  $\varpi_v$  est le sous-groupe parabolique standard de Lévi  $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_r}$ , le morphisme  $X_I \rightarrow X_{I^v}$  correspond à la donnée d'une chaîne d'isogénies

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{G}_r = \mathcal{G}_A / \mathcal{G}_A[\varpi_v]$$

de  $\mathcal{O}_v$ -modules de Barsotti-Tate où :

- pour tout  $i = 1, \dots, r$ , l'isogénie  $\mathcal{G}_{i-1} \rightarrow \mathcal{G}_i$  est de degré  $q^i$  et
- le composé de ces  $r$  isogénies est égal à l'application canonique  $\mathcal{G}_A \rightarrow \mathcal{G}_A / \mathcal{G}_A[\varpi_v]$ ,

où  $\mathcal{G}_A$  est le module de Barsotti-Tate associé à la variété abélienne universelle sur  $X_{I^v}$ .

**2.1.4. Notation.** — Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on note  $Y_{I, i}$  le sous-schéma fermé de  $X_{I, \bar{s}_v}$  sur lequel  $\mathcal{G}_{i-1} \rightarrow \mathcal{G}_i$  a un noyau connexe. Pour tout  $S \subset \{1, \dots, r\}$ , on note

$$Y_{I, S} = \bigcap_{i \in S} Y_{I, i}, \quad Y_{I, S}^0 = Y_{I, S} - \bigcup_{S \subsetneq T} Y_{I, T}.$$

De la théorie du modèle local de Rapoport-Zink, on déduit la description suivante.

**2.1.5. Proposition.** — Le schéma  $X_I$  est de pure dimension  $d$  et a réduction semi-stable sur  $\mathcal{O}_v$ , i.e. pour tout point fermé  $x$  de  $X_{I, \bar{s}_v}$ , il existe un voisinage étale  $V \rightarrow X_I$  de  $x$  et un  $\mathcal{O}_v$ -morphisme étale

$$V \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v[T_1, \dots, T_n] / (T_1 \cdots T_m - \varpi_v)$$

pour  $1 \leq m \leq n$ . Le schéma  $X_I$  est régulier et le morphisme de restriction du niveau  $X_I \rightarrow X_{I^v}$  est fini et plat.

- Tous les  $Y_{I,S}$  sont lisses sur  $\text{Spec } \kappa(w)$  de pure dimension  $d - \sharp S$  avec

$$X_{I,\bar{s}_v} = \bigcup_{i=1}^r Y_{I,i}$$

où pour  $i \neq j$ , les schémas  $Y_{I,i}$  et  $Y_{I,j}$  n'ont pas de composante connexe en commun.

- Pour tout  $1 \leq h \leq r$ , on a

$$X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} = \bigcup_{\sharp S \geq h} Y_{I,S}, \quad X_{I,\bar{s}_v}^{=h} = \bigcup_{\sharp S = h} Y_{I,S}^0.$$

**2.2. Cohomologie d'un système local.** — Fixons un plongement  $\sigma_0 : E \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$  et notons  $\Phi$  l'ensemble des plongements  $\sigma : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$  dont la restriction à  $E$  est  $\sigma_0$ . On rappelle alors qu'il existe une bijection explicite entre les représentations algébriques irréductibles  $\xi$  de  $G$  sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  et les  $(d+1)$ -uplets

$$(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$$

où  $a_0 \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $\sigma \in \Phi$ , on a  $\vec{a}_\sigma = (a_{\sigma,1} \leq \dots \leq a_{\sigma,d})$ . D'après le théorème de Baire, il existe une extension finie  $K$  de  $\mathbb{Q}_l$  telle que la représentation  $\iota^{-1} \circ \xi$  de plus haut poids  $(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$ , est définie sur  $K$ . On note  $W_{\xi,K}$  l'espace de cette représentation et  $W_{\xi,\mathcal{O}}$  un réseau stable où  $\mathcal{O}$  désigne l'anneau des entiers de  $K$ .

*Remarque :* si on suppose que  $\xi$  est  $l$ -petit, i.e. que pour tout  $\sigma \in \Phi$  et pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , on a  $0 \leq a_{\tau,j} - a_{\tau,i} < l$ , alors un tel réseau stable est unique à homothétie près.

Notons  $\lambda$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  et soit pour  $n \geq 1$ , un sous-groupe distingué  $I_n \in \mathcal{I}$  de  $I \in \mathcal{I}$ , compact ouvert agissant trivialement sur  $W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$ . On note alors  $V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$  le faisceau sur  $X_I$  dont les sections sur un ouvert étale  $T \rightarrow X_I$  sont les fonctions

$$f : \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T) \rightarrow W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout  $k \in I$  et  $C \in \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T)$ , on a la relation  $f(Ck) = k^{-1}f(C)$ .

**2.2.1. Notation.** — On pose alors

$$V_{\xi,\mathcal{O}} = \varprojlim_n V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} \text{ et } V_{\xi,K} = V_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation  $V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}$  et  $V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l}$  pour les versions sur  $\bar{\mathbb{Z}}_l$  et  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  respectivement.

**2.2.2. Définition.** — La représentation  $\xi$  est dite *régulière* si son paramètre  $(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$  est tel que pour tout  $\sigma \in \Phi$ , on a  $a_{\sigma,1} < \dots < a_{\sigma,d}$ . Elle est dite *très régulière* si elle vérifie les conditions de la définition 7.18 de [7].

**2.2.3. Définition.** — Une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  est dite  $\xi$ -cohomologique s'il existe un entier  $i$  tel que

$$H^i((\text{Lie}G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où  $U_\tau$  est un sous-groupe compact modulo le centre de  $G(\mathbb{R})$ , maximal, cf. [4] p.92. On notera  $d_\xi^i(\Pi_\infty)$  la dimension de ce groupe de cohomologie. Une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible

$\Pi^\infty$  de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  sera dit automorphe  $\xi$ -cohomologique s'il existe une  $\mathbb{C}$ -représentation  $\xi$ -cohomologique  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  telle que  $\iota_l(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$  est une  $\mathbb{C}$ -représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ .

### 2.3. Localisation de la cohomologie et torsion. —

**2.3.1. Théorème.** — (cf. [7]) Soit  $I \in \mathcal{I}$  maximal en  $l$  et  $\xi$  un paramètre très régulier au sens de la définition 7.18 de [7]. Si  $l$  est bon au sens de la définition 2.3 de [7], et donc suffisamment grand relativement au poids de  $\xi$ , alors la cohomologie de  $V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est concentrée en degré médian et sans torsion, i.e.  $H^i(X_{I, \overline{s}_v}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}) = (0)$  pour tout  $i \neq d-1$  et sans torsion pour  $i = d-1$ .

Comme expliqué dans [3], pour attraper d'autres cas, par exemple le système local trivial ou alors des cas où le niveau de  $I$  en  $l$  n'est plus maximal, il est raisonnable de localiser la cohomologie en un idéal maximal de l'algèbre de Hecke.

**2.3.2. Notations.** — — Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $\text{Spl}(I)$  l'ensemble des places  $w$  de  $F$  telles que

- $w$  ne divise pas le niveau  $I$  et
- $p_w := w|_{\mathbb{Q}}$  est décomposé dans  $F$  et distinct de  $l$ , avec

$$G(\mathbb{Q}_{p_w}) \simeq \mathbb{Q}_{p_w}^\times \times GL_d(F_w) \times \prod_{i=2}^r (B_{w_i}^{op})^\times,$$

où  $p_w = w \cdot \prod_{i=2}^r w_i$  dans  $F^+$ .

- Pour  $i = 0, \dots, d$ , on pose

$$T_{w,i} := \text{diag}(\overbrace{p_w, \dots, p_w}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \times 1 \in GL_d(\mathbb{Q}_{p_w}) \times \mathbb{Z},$$

et on note

$$\mathbb{T}_I := \mathbb{Z}_l[T_{w,i} : w \in \text{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d],$$

l'algèbre de Hecke associée à  $\text{Spl}(I)$ .

- Pour  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$ , on note

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_{w,i}}}{\overline{T_{w,i-1}}} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w$  associé à  $\mathfrak{m}$ , i.e. on garde en mémoire la multiplicité des paramètres.

**2.3.3. Théorème.** — (cf. le théorème 4.4 de [3]) S'il existe  $w \in \text{Spl}(I)$  vérifiant la propriété suivante

$$\alpha \in S_{\mathfrak{m}}(w) \Rightarrow q_w \alpha \notin S_{\mathfrak{m}}(w),$$

alors la localisation en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie de  $V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est concentrée en degré médian et sans torsion, i.e.  $H^i(X_{I, \overline{s}_v}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} = (0)$  pour tout  $i \neq d-1$  et sans torsion pour  $i = d-1$ .



Fixons un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$ . Rappelons que les idéaux premiers minimaux de  $\mathbb{T}_I$  sont les idéaux premiers de  $\mathbb{T}_I$  au dessus de l'idéal nul de  $\mathbb{Z}_l$  et sont donc en bijection naturelle avec les idéaux premiers de  $\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ . Ainsi pour  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  un tel idéal premier minimal,  $(\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\tilde{\mathfrak{m}}$  est une extension finie  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\mathbb{Q}_l$ .

**2.3.4. Définition.** — On dit que  $\tilde{\mathfrak{m}}$  est  $\xi$ -cohomologique s'il existe une représentation automorphe irréductible  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  qui est  $\xi$ -cohomologique, dont les paramètres de Satake  $S_{\tilde{\mathfrak{m}}}(w)$  de  $\Pi_{p_w}$  pour tout  $w \in \text{Spl}(I)$  sont donnés par les images des  $\frac{\overline{T_{w,i}}}{T_{w,i-1}} \in (\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\tilde{\mathfrak{m}}$ . L'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  sera dit  $\xi$ -cohomologique s'il contient un idéal premier minimal qui le soit.

*Remarque :* la surjection  $\mathbb{T}_I/\tilde{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$  se relève en une injection  $\mathbb{T}_I/\tilde{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  où  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  désigne l'anneau des entiers de  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ . On peut ainsi parler de la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  des paramètres de Satake  $S_{\tilde{\mathfrak{m}}}(w)$  lesquels ne dépendent donc que de  $\mathfrak{m}$  et sont donc donnés par le multi-ensemble

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_w^{(i)}}}{\overline{T_w^{(i-1)}}} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

À un idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}}$  qui est  $\xi$ -cohomologique, est associé une classe d'équivalence proche  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  au sens de [9], i.e. un ensemble fini de représentation automorphe irréductible  $\Pi$  comme précédemment. On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}_l}} : \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}_l})$$

la représentation galoisienne associée à un tel  $\Pi$  d'après [4] et [9], laquelle est nécessairement bien définie à isomorphisme près d'après le théorème de Cebotarev. Cette représentation est en fait définie sur  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , i.e.  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}_l}} \simeq \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} \otimes_{K_{\tilde{\mathfrak{m}}}} \overline{\mathbb{Q}_l}$ . Pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , la réduction modulo l'idéal maximal  $(\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}})$  de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , bien définie à semi-simplification près, ne dépend que de  $\mathfrak{m}$ , on note  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\bar{\mathbb{F}_l})$  l'extension des scalaires à  $\bar{\mathbb{F}_l}$ . Les valeurs propres de  $\text{Frob}_w$  sont alors données par le multi-ensemble  $S_{\mathfrak{m}}(w)$ .

**2.3.5. Définition.** — On dira d'une représentation irréductible

$$\bar{\rho} : \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}_l})$$

qu'elle est de niveau  $I \in \mathcal{I}$ , s'il existe un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$  tel que  $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ .

**2.3.6. Théorème.** — (cf. le théorème 4.14 de [3]) Supposons que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  vérifie une des deux hypothèses suivantes :

- soit  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est induit d'un caractère de  $G_K$  pour  $K/F$  une extension galoisienne cyclique ;
- soit  $l \geq d$  et  $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \bar{\mathbb{F}_l}^\times GL_n(k)$  pour un sous-corps  $k \subset \bar{\mathbb{F}_l}$ .

Alors pour  $l \geq d + 2$ , les  $H^i(X_{I, \bar{\eta}}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}_l}})_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion.

*Remarque :* dans [3], la conclusion du théorème précédent est valide pourvu que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  vérifie l'hypothèse 4.13 de loc. cit. reliée à la relation de congruence vérifiée par nos variétés de Shimura et prouvée dans [11].

Pour une place  $v$  de  $F$ , la restriction de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  au groupe de Galois local en  $v$  s'identifie à une représentation de Weil-Deligne  $(\sigma_{\tilde{\mathfrak{m}},v}, N_{\tilde{\mathfrak{m}},v})$  où  $N_{\tilde{\mathfrak{m}},v}$  est le logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale. Notons que cet opérateur nilpotent est défini à l'aide de la série formelle  $\ln(1-x) = -\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  que l'on peut tronquer en  $k \leq d-1$ . En particulier :

- si  $l \geq d$ , l'opérateur  $N_{\tilde{\mathfrak{m}},v}$  est défini sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  et on note  $\overline{N}_{\tilde{\mathfrak{m}},v}$  sa réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ .
- Si  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$  tel que  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est irréductible, alors comme la réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est isomorphe<sup>(3)</sup> après extension des scalaires à  $\overline{\mathbb{F}}_l$ , à  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ , l'opérateur de monodromie  $\overline{N}_{\tilde{\mathfrak{m}},v}$  ne dépend que de  $\mathfrak{m}$ , on le note simplement  $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ .

### 3. Augmentation du niveau

**3.1. Suite spectrale de Rapoport-Zink.** — On considère à présent un niveau  $I \in \mathcal{I}w(v)$  tel que modulo  $\varpi_v$ , la composante  $I_v$  de  $I$  à la place  $v$  est conjugué au parabolique standard de Lévi  $GL_{m_1} \times GL_{m_2} \times \cdots \times GL_{m_r}$  de  $GL_d$  avec  $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$ . Avec les notations de 2.1.4, la suite spectrale de Rapoport-Zink s'écrit

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq \max\{0, -p\}} \bigoplus_{\#S=p+2i+1} H^{q-2i}(Y_{I,S}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}(-i)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{I, \tilde{s}_v}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}). \quad (1)$$

Rappelons que sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , cette suite spectrale dégénère en  $E_2$  et si  $\widetilde{N}_v : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+2, q-2}(-1)$  est défini comme l'identité sur tous les facteurs présents à la fois dans  $E_1^{p,q}$  et  $E_1^{p+2, q-2}(-1)$  et nul sur les autres, alors l'endomorphisme induit par  $\widetilde{N}_v$  sur l'aboutissement de cette suite spectrale est l'opérateur de monodromie de  $H^{p+q}(X_{I, \tilde{s}_v}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ , lequel est donc entier.

Fixons un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$  tel qu'il existe un idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  ainsi qu'une représentation automorphe irréductible  $\Pi \in \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  possédant des vecteurs non nuls invariants sous  $I$ . On note  $\widetilde{N}_{v, \mathfrak{m}}$  le localisé de  $\widetilde{N}_v$  ainsi que  $\overline{\widetilde{N}_{v, \mathfrak{m}}}$  sa réduction modulo l'idéal maximal de  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ .

**3.1.1. Proposition.** — *On suppose vérifiés les points 1), 2) et 3) de 1.2. Alors l'indice de nilpotence de  $\overline{\widetilde{N}_{v, \mathfrak{m}}}$  est  $\leq r-1$ , i.e.  $\overline{\widetilde{N}_{v, \mathfrak{m}}}^{r-1} = 0$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\Lambda := H^{d-1}(X_{I, \tilde{s}_v}, V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ . D'après le théorème 2.3.6,  $\Lambda$  est un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module libre de type fini muni d'une action de  $\mathbb{T}_{I, \mathfrak{m}}[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)]$  telle que

$$\Lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}} \bigoplus_{i=1}^{\mu_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim}} \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, i}^{\sim},$$

avec  $\mu_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim} \in \mathbb{N}$  et où chacun des  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, i}^{\sim}$  est isomorphe à  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l}^{\sim}$ , l'action de  $\mathbb{T}_{I, \mathfrak{m}}$  se factorisant par  $\mathbb{T}_{I, \mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}$ . Pour tout  $\tilde{\mathfrak{m}}$  et  $1 \leq i \leq \mu_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim}$ , notons

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, i, \Lambda}^{\sim} := \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, i}^{\sim} \cap \Lambda \hookrightarrow \Lambda$$

---

3. La condition « à semi-simplification près » n'a plus lieu dans cette situation.

qui est donc un  $\mathbb{T}_{I, \mathfrak{m}}[\text{Gal}(\bar{F}/F)]$ -module tel que la réduction  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, i, \Lambda}$  de  $\rho_{\mathfrak{m}, i, \Lambda}$  modulo l'idéal maximal  $\mathfrak{p}_l$  de  $\bar{\mathbb{Z}}_l$  est isomorphe à  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ . On obtient alors une inclusion  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, i, \Lambda} \hookrightarrow \Lambda/\mathfrak{p}_l$  et on en déduit en particulier que  $\Lambda/\mathfrak{p}_l$  s'écrit comme une somme finie  $\sum_{j \in J} V_j$  de sous-modules simples  $V_j \simeq \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ . Classiquement cette somme est nécessairement directe. En effet considérons un sous-ensemble  $J' \subset J$  maximal pour que la somme  $\sum_{j \in J'} V_j$  soit directe et supposons par l'absurde l'existence de  $j_0 \in J \setminus J'$  : comme  $V_{j_0}$  est simple, on a  $V_{j_0} \cap (\sum_{j \in J'} V_j) = \{0\}$  et donc  $V_{j_0} + (\sum_{j \in J'} V_j)$  est direct contredisant la maximalité de  $J'$ . Le résultat découle alors directement du fait que  $\bar{N}_{v, \mathfrak{m}}$  est d'indice de nilpotence  $\leq r - 1$ .  $\square$

**3.2. Preuve du théorème principal.** — Soit  $I \in \mathcal{I}$  un sous-groupe ouvert compact tel que modulo  $\varpi_v$  la composante  $I_v$  de  $I$  à la place  $v$  est conjuguée au parabolique standard de Lévi  $GL_{m_1} \times GL_{m_2} \times \cdots \times GL_{m_r}$  de  $GL_d$  avec  $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$  et  $r > 1$ . On suppose que  $\mathfrak{m}$ , un idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$ , est  $\xi$ -cohomologique.

*Remarque :* pour tout  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , l'interprétation géométrique de l'opérateur de monodromie  $N_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}$  donnée par la suite spectrale de Rapoport-Zink (1), impose clairement que l'indice de nilpotence de  $N_{\tilde{\mathfrak{m}}, v}$  est inférieur ou égal à  $r$ .

**3.2.1. Lemme.** — Soit  $\pi_v \simeq \text{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \text{St}_{t_s}(\chi_s)$  avec  $t_1 + \cdots + t_s = d$  et où  $\chi_1, \dots, \chi_s$  sont des caractères de  $F_v^\times$ . L'ensemble des parahoriques standards  $P_v$

- contenus entre l'Iwahori standard  $\text{Iw}_v$  et le compact maximal  $GL_d(\mathcal{O}_v)$  et
- tels que  $\pi_v$  ait des vecteurs non nuls  $P_v$ -fixes,

admet un plus grand élément dont les tailles des blocs sont  $t_1, \dots, t_s$ .

*Démonstration.* — Notons  $K_v = GL_d(\mathcal{O}_v)$  le compact maximal de  $GL_d(F_v)$ , puis  $K_v(1)$  son pro- $p$  radical. Rappelons que  $\pi_v$  a des vecteurs non nuls  $P_v$ -fixes si et seulement si l'espace  $K_v(\pi_v)$  des vecteurs non nuls  $K_v(1)$ -fixes de  $\pi_v$  vu comme représentation de  $K_v/K_v(1)$  a des vecteurs non nuls fixes par  $P'_v := P_v/K_v(1)$ , c'est-à-dire si  $K_v(\pi_v)^{U'_v}$ , où  $U'_v$  le radical unipotent de  $P'_v$ , contient le caractère trivial de  $M'_v = P'_v/U'_v$ .

En appliquant l'involution de Zelevinski  $Z$ , on se ramène à la propriété que  $K_v(Z(\pi_v))^{U'_v}$  contient un facteur non dégénéré, c'est-à-dire au fait que  $Z(\pi_v)$  est  $\lambda$ -dégénérée, où  $\lambda$  désigne la partition de  $d$  donnée par les blocs de  $M'_v$ , au sens de la théorie des modèles de Whittaker dégénérés, cf. [10] §V.5. Le résultat découle alors de loc. cit.  $\square$

**3.2.2. Définition.** — Pour  $\tilde{\mathfrak{m}}$  un idéal premier minimal de  $\mathbb{T}_I$ , on note  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$  (resp.  $V_{\mathfrak{m}}(v)$ ) le multi-ensemble des valeurs propres de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}(\text{Frob}_v)$  (resp. de  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(\text{Frob}_v)$ ).

**3.2.3. Lemme.** — On suppose que pour tout sous-groupe parahorique  $I'_v$  contenant strictement  $I_v$ , la représentation galoisienne  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  n'est pas de niveau  $I' := I^v I'_v$ . Alors pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m} \subset \mathbb{T}_I$ , on a

$$\#V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1}V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \geq m_r.$$

*Démonstration.* — Par hypothèse pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$ , pour toute  $\mathbb{Q}_l$ -représentation automorphe  $\Pi \in \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  et pour tout sous-groupe  $I' \subsetneq I \in \mathcal{I}$  comme dans l'énoncé,  $\Pi_v$  a des vecteurs non nuls invariants sous  $I_v$  mais pas sous  $I'_v$ .

Rappelons qu'une représentation irréductible admissible de  $GL_d(F_v)$  ramifiée ayant des vecteurs non nuls invariants sous un sous-groupe parahorique est de la forme  $\text{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \text{St}_{t_s}(\chi_s)$  avec  $t_1 + \cdots + t_s = d$  et où  $\chi_1, \dots, \chi_s$  sont des caractères de  $F_v^\times$ . D'après le lemme précédent pour que  $\Pi_v$  possède des vecteurs non nuls invariants sous  $I_v$  et pas par un sous-groupe strict, on doit avoir

$$\Pi_v \simeq \left( \text{St}_r(\chi_1) \times \cdots \times \text{St}_r(\chi_{m_r}) \right) \times \left( \text{St}_{r-1}(\chi'_1) \times \cdots \times \text{St}_{r-1}(\chi'_{m_{r-1}-m_r}) \right) \times \cdots$$

Comme les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sur  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  sont données, par la correspondance locale de Langlands, par

$$\left\{ \chi_1(\varpi_v) q_v^{\frac{1-r}{2}}, \dots, \chi_1(\varpi_v) q_v^{\frac{r-1}{2}}, \dots, \chi_{m_r}(\varpi_v) q_v^{\frac{1-r}{2}}, \dots, \chi_{m_r}(\varpi_v) q_v^{\frac{r-1}{2}}, \dots \right\}$$

on obtient bien la minoration de l'énoncé.  $\square$

**3.2.4. Lemme.** — On reprend les hypothèses du lemme précédent et on suppose en outre que  $V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v)$  est de cardinal  $\leq m_r$ . Alors pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , le multi-ensemble  $V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v)$  est la réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$ .

*Démonstration.* — Rappelons que  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  s'obtient comme la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  de  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$  pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  via la surjection canonique  $\mathbb{T}_I/\tilde{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$ . Le résultat découle alors simplement du lemme 3.2.3 et de l'hypothèse  $\#V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v) \leq m_r$ .  $\square$

*Preuve du théorème 1.3 :* on reprend les hypothèses des lemmes précédents en supposant en outre que  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  est un ensemble, i.e. que les multiplicités dans  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  sont égales à 1. Il s'agit alors d'aboutir à une contradiction, i.e. il est absurde de supposer qu'il n'existe aucun  $I' = I^v I'_v$  avec  $I'_v \subsetneq I_v$  tel que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est de niveau  $I'$ .

Avec les notations de la suite spectrale de Rapoport-Zink (1), de la proposition 3.1.1 on en déduit que le localisé  $E_{1,\mathfrak{m}}^{r,d-r-1}$  du terme  $E_1^{r,d-r-1}$  est contenu dans  $\mathfrak{m}H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  ce qui fournit une surjection

$$H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}/E_{1,\mathfrak{m}}^{r,d-r-1} \twoheadrightarrow H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}. \quad (2)$$

D'après le lemme précédent, l'ensemble  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$  est de cardinal  $m_r$ . Par ailleurs tout sous-Gal( $\bar{F}/F$ )-quotient irréductible  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim}$  de  $H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim}$  est facteur direct, isomorphe à  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}},\bar{\mathbb{Q}}_l}$  et  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim} \cap E_{1,\tilde{\mathfrak{m}}}^{r,d-r-1}$  est une sous-Gal( $\bar{F}_v/F_v$ )-représentation de dimension  $m_r$  d'après le lemme 3.2.1, dont les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  appartiennent à  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$ . On en déduit ainsi que les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sur  $E_{1,\tilde{\mathfrak{m}}}^{r,d-r-1}$  sont exactement celles de  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$  qui appartiennent à  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v)$ , i.e. les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sur  $H^{d-1}(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\sim}/E_{1,\tilde{\mathfrak{m}}}^{r,d-r-1}$  sont dans  $V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) - (V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\tilde{\mathfrak{m}}}(v))$ .

Ainsi d'après le lemme précédent, les images modulo  $\mathfrak{m}$  des valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sur  $H^{d-1}(X_{I, \bar{s}_v}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}/E_{1, \mathfrak{m}}^{r, d-r-1}$ , appartiennent à  $V_{\mathfrak{m}}(v) - \left(V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v)\right)$ . De la surjection (2), on en déduit alors que

$$V_{\mathfrak{m}}(v) \subset V_{\mathfrak{m}}(v) - \left(V_{\mathfrak{m}}(v) \cap q_v^{r-1} V_{\mathfrak{m}}(v)\right)$$

ce qui contredit l'hypothèse que  $V_{\mathfrak{m}}(v)$  est un ensemble de cardinal  $d$ .

## Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [4] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [5] D. Helm. Mazur's principle for  $u(2, 1)$  Shimura varieties. <http://www.imperial.ac.uk/~dhelm/>.
- [6] Chandrashekhara Khare and Jean-Pierre Wintenberger. Serre's modularity conjecture. *Inventiones Mathematicae*, 178 (3), 2009.
- [7] K.-W. Lan and J. Suh. Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties. *Duke Math.*, 161(6) :951–1170, 2012.
- [8] K. A. Ribet. On modular representations of  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  arising from modular forms. *Invent. Math.*, 100(2) :431–476, 1990.
- [9] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [10] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [11] T. Wedhorn. Congruence relations on some Shimura varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 524 :43–71, 2000.

---

BOYER PASCAL • *E-mail* : [boyer@math.univ-paris13.fr](mailto:boyer@math.univ-paris13.fr), Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25

DENG TAIWANG • *E-mail* : [deng@math.univ-paris13.fr](mailto:deng@math.univ-paris13.fr), Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25